Universidade de Lisboa

Faculdade de Ciências

Departamento de Estatística e Investigação Operacional

UNIFORMIDADE E ENTROPIA

Gabriela Ribeiro Sobral Gomes

Dissertação

Mestrado em Estatística e Investigação Operacional

Área de Especialização em Estatística

2013

Universidade de Lisboa

Faculdade de Ciências

Departamento de Estatística e Investigação Operacional

UNIVERSIDADE DE LISBOA

UNIFORMIDADE E ENTROPIA

Gabriela Ribeiro Sobral Gomes

Dissertação

Mestrado em Estatística e Investigação Operacional

Área de Especialização em Estatística

Dissertação orientada pelo Professor Doutor Fernando Sequeira

2013

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao Professor Fernando Sequeira, que tanto me apoiou e ajudou neste trabalho, para além de me ter dado muita força e alento durante os momentos de maiores dificuldades, dúvidas e incertezas sentidas durante a sua elaboração.

Agradeço também ao Professor Dinis Pestana, pelo esclarecimento claro e sábio que expôs de algumas dúvidas e questões que eu lhe apresentei sobre o tema desta dissertação.

Expresso também a minha gratidão à professora Carla Sofia Amador, pelo apoio que me deu ao facultar alguns elementos de pesquisa.

Também expresso o meu agradecimento à minha amiga Elisa Barbosa pela ajuda que me deu durante a construção da estrutura da dissertação.

Agradeço também à minha família por todo o apoio e ajuda adicional que me deu durante a elaboração desta dissertação.

Resumo

Uniformidade. Um conceito amplo que é bastante usado e desenvolvido na linguagem das probabilidades. A sua amplitude é tal que merece ser estudada e aprofundada. Para isso é necessário que se procure, analise e investigue resultados que com ela estão relacionados. Foram encontrados bastantes desses resultados, uns envolvendo estatísticas ordinais, outros envolvendo a distribuição de operações conhecidas com variáveis aleatórias, outros ainda envolvendo misturas de distribuições, remetendo todos para a ligação sinónima que este conceito estabelece com a muito conhecida *distribuição uniforme*. Esta última, por sua vez, apresenta várias características mas há uma que é importante destacar: a sua visualização gráfica permite concluir que a falta de informação é máxima, daí ser a *distribuição de máxima entropia*. E o que é a entropia? Acredito que para alguns este conceito seja desconhecido em termos matemáticos ou probabilísticos, mas é precisamente o que designa a falta de informação de uma determinada distribuição de probabilidade. É um conceito bastante interessante, pelo que seria produtivo estudar o valor da entropia noutras distribuições, como é o caso das distribuições *Beta* (p,q), e relacionar os resultados obtidos nesse estudo com o valor obtido para a distribuição uniforme, que é nulo.

Foi assim elaborado um estudo de simulação usando as variáveis aleatórias $W = \min\left(\frac{X}{Y}, \frac{(1-X)}{(1-Y)}\right)$ e $V = X + Y - \mathcal{J}[X + Y]$ (representando $\mathcal{J}(x)$ a parte inteira de um número x), com $X \cap Beta(p_1,q_1)$ e $Y \cap Beta(p_2,q_2)$ independentes, com cada um dos pares a variar num conjunto de vetores bidimensionais já definido, com o propósito de descobrir e estudar a relação entre uniformidade e entropia.

Palavras-chave: uniformidade, distribuição de funções de vetores aleatórios, falta de informação, simulação, máxima entropia, estatísticas ordinais, p-value

Abstract

Uniformity is a broad concept widely used and developed on probability language. It's so broad that it deserves to be studied in-depth. For that, it's essential to search, analyze and investigate some results related to it. We found plenty of results, some involving order statistics, other related to the distribution of known operations using random variables or a combination of other distributions. All these results refer to the synonymous link that this concept has with the well-known *uniform distribution*. The Uniform distribution has several features, but there is one in particular that is worth mentioning: Its graphical display shows that its lack of information is maximal, and that is the reason why it is the *distribution of maximum entropy.* What is entropy? It is likely that some people are not familiar with this concept in mathematical or probabilistic terms, but it means precisely the lack of information in a probability distribution. This is a quite interesting concept, and it would be productive to study the entropy value in other distributions, such as *Beta*(p,q), and relate the results with the entropy value obtained for the uniform distribution, which is null.

A simulation study was prepared using random variables such as $W = \min\left(\frac{X}{Y}, \frac{(1-X)}{(1-Y)}\right)$ and $V = X + Y - \mathcal{I}[X+Y]$ ($\mathcal{I}(x)$ represents the integer part of x), with $X \cap$ *Beta*(p_1,q_1) and $Y \cap$ *Beta*(p_2,q_2), independent random variables with each pair varying in a defined bi-dimensional vector set, in order to discover and study the relationship between uniformity and entropy.

Key-words: uniformity, distributions of the functions of random vectors, lack of information, simulation , maximum entropy, order statistics, p-value

ÍNDICE

Lista de abreviaturas/siglas

f.d.: função distribuição

f.d.p.: função densidade de probabilidade

i.i.d: independentes e identicamente distribuídas

v.a.: variável aleatória

$\mathcal{I}(x)$: característica de um número x

Capítulo 1

Introdução

Na área das probabilidades e estatística, tal como na área da matemática, há resultados que foram investigados e há outros por investigar. Abrir mais o "leque" de novos resultados descobertos é sempre algo muito útil e proveitoso para o futuro. Acredito que existam muitos estatísticos ligados a estas áreas que ponham a seguinte questão: Qual a relação entre uniformidade e entropia? Pode ter resposta, mas esta terá que ser estruturada. E estruturá-la não implica só dizer que "uniformidade" significa "distribuição uniforme", nem dizer que a entropia se define como uma medida da falta de informação de uma distribuição de probabilidade. É preciso desenvolver, explorar os dois conceitos, e se for preciso, realizar estudos para provar que essa relação pode existir e de que relação se trata.

No capítulo seguinte, o **capítulo 2**, é feita uma caracterização profunda do conceito de *uniformidade* através de alguns resultados, teoremas e proposições, em que alguns são referidos e outros, além de referidos, são demonstrados. Para esta pesquisa dispomos de grandes livros, tais como Johnson, *et al* (1995), que apresenta resultados importantes para a caracterização da distribuição uniforme e Gnedenko (1968), útil para quem queira estudar a distribuição da soma de variáveis aleatórias com distribuição uniforme. Não devemos também esquecer os artigos, tais como Paul (2003) e Gupta (1993), muito úteis para estudar a relação entre a uniformidade e estatísticas ordinais, e Habibi *et al* (2006), ideal para aqueles que pretendam estudar o modo recursivo de determinar a distribuição da soma de variáveis aleatórias com distribuição uniforme.

Relativamente ao **capítulo 3**, é feito um estudo de simulação com o objetivo de descobrir qual a relação entre a uniformidade e a entropia. Esse estudo terá como primeira fase o cálculo das entropias das distribuições de duas v.a.'s X e Y, tais que $X \cap Beta(p_1,q_1)$ e $Y \cap Beta(p_2,q_2)$, com cada um dos pares de parâmetros a variar num conjunto de vetores bidimensionais. Posteriormente, os valores das entropias das distribuições dessas v.a.'s são comparados com os valores das entropias das distribuições das v.a.'s $W = \min\left(\frac{X}{Y}, \frac{(1-X)}{(1-Y)}\right)$ e $V = X + Y - \mathcal{I}[X + Y]$ com o propósito de verificar se estas operações "aumentam" a entropia. Por outras palavras, pretende-se verificar se os valores das entropias das distribuições das novas v.a.'s estão mais próximos de zero do que os valores das entropias das distribuições das variáveis de entrada.

Por fim, é aplicado o teste à uniformidade de Kolmogorov-Smirnov às novas variáveis e posteriormente determina-se a correlação entre os p-values obtidos nesse teste e as entropias obtidas, para que se consiga chegar a conclusões claras que permitam atingir o objetivo deste estudo.

É claro que o conceito de entropia terá que ser definido e caracterizado em primeiro lugar para que os leitores desta dissertação não só o passem a conhecer em termos probabilísticos, como também se possam servir dele em trabalhos futuros.

Capítulo 2

Uniformidade

Para estudarmos este tema em pormenor e a fundo, temos de ter em conta uma das distribuições mais importantes na área das probabilidades: a **distribuição uniforme**. Esta apresenta-se como um conceito muito extenso, pelo que pode ser abordado de diferentes modos. O objetivo deste capítulo é precisamente **explorar** a dita distribuição, para que os futuros leitores desta dissertação possam aprender e pesquisar aspetos sobre a mesma que lhes sejam úteis para a sua vida futura.

2.1 Distribuição uniforme: Origem e história

A distribuição *Uniforme* ou *Retangular* apresenta-se como um caso específico da distribuição *Beta*, em p=1 e q=1. O seu nome advém do facto do gráfico da sua f.d.p. ser constante num dado intervalo de números reais (Johnson, Kotz e Balakrishman, 1995, p. 276). Essa função pode ser definida como:

$$f_X(x) = \frac{1}{2h}\,, \quad m - h < x < m + h\,, \qquad h > 0 \;\; (1)$$

Esta distribuição é denotada como Uniforme(m-h ,m+h). Temos que, por outro lado, a sua f.d. é dada por

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq m-h \\ \dfrac{x-m+h}{2h}, & m-h < x < m+h \\ 1, & x \geq m+h \end{cases} \quad (2)$$

A distribuição uniforme pode ser reparametrizada usando os extremos do intervalo em vez do ponto médio e semi-amplitude do mesmo; isto equivale a fazer $a = m - h$ e $b = m + h$. Podemos assim obter os valores de m e de h em função de a e b, Sendo $m = \frac{1}{2}(a+b)$ e $h = \frac{1}{2}(b-a)$.

É muito mais simples trabalhar com esta "versão" da uniforme, pelo que vamos "apostar" mais nesta do que na expressão original.

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & c.c \end{cases} \quad (3)$$

E a sua f.d. pode ser representada como

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a < x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases} \quad (4)$$

A distribuição *Uniforme*(0,1) é chamada distribuição uniforme *standard,* e é de especial relevância em estudos de simulação devido ao teorema da transformação uniformizante (notar que todas as linguagens de programação permitem a obtenção de números pseudo-aleatórios que são "aproximações" desta distribuição).

Algumas referências históricas

Segundo Johnson *et al.* (1995) a distribuição uniforme é uma conceção tão natural que provavelmente tem sido muito mais usada do que pode ser inferida de artigos. De entre esses artigos podemos mencionar as descrições do uso dessa distribuição por Bayes (1763) ou por Laplace (1812). Alguns interesses históricos vão ao encontro da distribuição da soma de variáveis i.i.d. com distribuição uniforme.

Medidas de dispersão e funções geradoras

Seja X uma variável aleatória tal que $X \cap$ *Uniforme*(a,b). Tem-se que

$$E(X) = \int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \quad \text{e} \quad var(X) = \frac{(b-a)^2}{2}$$

Tem-se também que a função geradora de momentos de X é dada por

$$M_X(s) = \int_a^b e^{sx} f(x)dx = \int_a^b \frac{e^{sx}}{(b-a)} dx = \frac{1}{(b-a)} \left[\frac{e^{sx}}{s}\right]_a^b = \frac{e^{sb} - e^{sa}}{s(b-a)}$$

para $s \neq 0$. Obviamente, $M_X(0) = 1$.

E tem-se analogamente que a função característica é dada por

$$\Psi(s) = E\left(e^{is}\right) = \int_a^b e^{isx} f(x)dx = \int_a^b \frac{e^{isx}}{(b-a)} dx = \frac{1}{(b-a)} \left[\frac{e^{isx}}{is}\right]_a^b = \frac{e^{isb} - e^{isa}}{is(b-a)}$$

para $s \neq 0$.

Teorema 2.1.1 (Transformação uniformizante): *Seja X uma v.a. absolutamente contínua, com função distribuição* $F_X(x)$ *crescente. Então Y=*$F_X(X)$ *tem distribuição Uniforme(0,1).*

Dem: Sendo F_X crescente, então esta função distribuição vai ser invertível, isto é, existe a inversa F_X^{-1}. O contradomínio de F_X toma valores entre 0 e 1.

Então, para valores de y pertencentes a $[0,1]$, tem-se

$$F_Y(y) = \mathbb{P}[Y \leq y] = \mathbb{P}[F_X(X) \leq y] = \mathbb{P}[X \leq F_X^{-1}(y)] = F_X(F_X^{-1}(y)) = y$$

e como consequência, temos

$$f_Y(y) = \frac{dy}{dy} = 1, \text{ para } 0 < y < 1$$

E fica assim demonstrado que $F_X(X) \cap$ *Uniforme*(0,1).

2.2 Algumas Características da Distribuição Uniforme

Uma primeira caracterização da distribuição uniforme pode ser feita através de alguns resultados/teoremas/proposições que jogam com esta mesma distribuição. Sequeira (2009) fez referência a dois resultados e um teorema que fazem referência à "descendência" uniforme a partir de outras variáveis aleatórias, sejam elas uniformemente distribuídas ou não.

Descendentes uniformes de parentes uniformes

Sejam X e Y duas variáveis aleatórias i. i. d. com distribuição *Uniforme*(0,1) .

A variável aleatória W=min$\left(\frac{X}{Y}, \frac{1-X}{1-Y}\right)$ tem suporte (0,1), e para $z \in (0,1)$,

$$\mathbb{P}\left[\min\left(\frac{X}{Y}, \frac{1-X}{1-Y}\right) \leq z\right] = \int_0^1 zy\, dy + \int_0^1 z(1-y)dy = z$$

Em adição, para quaisquer y e $z \in (0,1)$, temos:

$$\mathbb{P}\left[\min\left(\frac{X}{Y}, \frac{1-X}{1-Y}\right) \leq z \mid Y=y\right] = yz + (1-y)z, = \mathbb{P}\left[\min\left(\frac{X}{Y}, \frac{1-X}{1-Y}\right) \leq z\right]$$

E consequentemente, $W \cap$ *Uniforme*(0,1) e é independente de Y.

Analogamente, a variável aleatória $V = X+Y-\mathcal{J}[X+Y]$, é *Uniforme*(0,1). O seu suporte é (0,1), e tem-se, para $z \in (0,1)$,

$$\mathbb{P}\left[X+Y-\mathcal{J}[X+Y] \leq z\right] = \mathbb{P}\left[X+Y \leq z\right] + \mathbb{P}\left[1 < X+Y \leq 1+z\right] = z$$

E também vamos ter, para quaisquer $y, z \in (0,1)$,

$$\mathbb{P}\left[X+Y-\mathcal{J}[X+Y] \leq z \mid Y=y\right] = \max(0; z-y) + \min(1+z-y; 1) - (1-y) = z$$

Descendentes uniformes de parentes não uniformes

Usemos agora uma v.a. X_m com f.d.p. $f_{X_m}(x) = \left(mx + 1 - \frac{m}{2}\right) I_{(0,1)}(x)$ em vez de $Y \cap$ *Uniforme*(0,1). O uso desta variável, na definição das variáveis aleatórias W_m= min$\left(\frac{U}{X_m}, \frac{1-U}{1-X_m}\right)$ e $V_m = U + X_m - \mathcal{J}[U + X_m]$, iria revelar a sua não-uniformidade. De facto, tal não é o caso, pois U "massaja" suficientemente X_m, de modo a que o resultado seja uniforme. Dizemos assim, que *U* exerce uma atração muito forte para as operações acima descritas, chamando-se por isso um atractor.

Teorema 2.2.1 *Sejam X e U variáveis aleatórias independentes, X absolutamente contínua com suporte em (0,1) e U* ∩ *Uniforme*(0,1). Então $W^*=\min\left(\frac{U}{X},\frac{1-U}{1-X}\right)$ ∩ *Uniforme*(0,1) e $V^*=X+U-J[X+U]$ ∩ *Uniforme*(0,1) e independentes de *X.*

Johnson *et al* (1995) referiram mais alguns resultados que também caracterizam fortemente esta distribuição:

Resultado 2.2.1 (Demonstrado por Hamdan (1972)): *X* ∩ *Uniforme*(0,1) sse

$$E[-\log(1-X)\,|X>y] = -\log(1-y)+1,\ 0 \le y < 1.$$

Obs 2.2.1: Pusz (1988) dispôs de alternativas do tipo

$$E[h(X)|X>x] = g(x), \qquad 0 \le x < 1$$

em que $h(.)$ e $g(.)$ são funções conhecidas.

Resultado2.2.2(Demonstrado por Galambos e Kotz (1978)): *X* ∩ *Uniforme*(0,1) sse , para cada $\alpha \in [0,1]$

$$E[X^{-\alpha}|X<y] = \frac{y^{-\alpha}}{1-\alpha}$$

Resultado 2.2.3: Se *X* ∩ *Uniforme*(0,1), então $Z = -\log(X)$ ∩ *Exponencial*(1).

Dem: Tem-se

$F_Z(z) = \mathbb{P}[Z \le z] = \mathbb{P}[-\log(X) \le z] = \mathbb{P}[\log(X) > -z] = \mathbb{P}[\mathrm{X} > e^{-z}] = 1 - F_X(e^{-z}) = 1 - e^{-z},$ para $0 < e^{-z} < 1 \Rightarrow z > 0$

e podemos obter

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = f_X(e^{-z})\frac{de^{-z}}{dz} = e^{-z} \text{ para } z > 0.$$

E assim concluímos que $-\log(X)$ ∩ *Exponencial*(1).

Obs 2.2.2: Da mesma forma prova-se que se Z^* ∩ *Exponencial*(1), então $X = e^{-Z^*}$ ∩ *Uniforme*(0,1)

Resultado 2.2.4 (Demonstrado por Cowan, (1980)): Se W e Z são variáveis aleatórias independentes, sendo $W \cap$ *Gama*$(\alpha,1)$ e $Z \cap$ *Beta*$(a, \alpha - a)$, então $WZ \cap$ *Gama*$(a,1)$, sendo $0 < a < \alpha$.

Corolário 1: Fazendo $\alpha = 2$ e $a = 1$, temos que $WZ \cap$ *Exponencial*(1) e Z $\cap$ *Uniforme*$(0,1)$.

Corolário 2: Sejam X_1, X_2 e Z v.a.´s i.i.d. com distribuição uniforme standard. Então, $(X_1X_2)^Z \cap$ *Uniforme*$(0,1)$.

Dem:

Lembrando que

a. Se $W \cap$ *Gama*$(2,1)$, temos que $W = W_1 + W_2$ com $W_{i,\ i=1,2} \cap$ *Exponencial*(1), independentes:

b. As v. a's. $X_i = e^{-W_i}, i = 1,2$, são i.i.d. com distribuição *Uniforme*$(0,1)$ tal como $e^{-WZ} = \exp\{-(W_1 + W_2)Z\} = (X_1X_2)^Z$. Obteve-se então o seguinte resultado: Se X_1, X_2 e Z são v. a.'s i.i.d. com distribuição *Uniforme*$(0,1)$, então $(X_1X_2)^Z \cap$ *Uniforme*$(0,1)$.

Repare-se que o produto de dois números entre 0 e 1 provoca uma contração do output enquanto que a raiz provoca uma ampliação. O resultado da combinação dos dois é nulo.

Como demonstração alternativa poderemos pensar de outra forma.

Vamos supor que X_1, X_2 e Z são v. a.'s iid com distribuição *Uniforme*$(0,1)$.

Vamos começar por pegar na expressão $(X_1X_2)^Z$ e logaritmizá-la.

Temos:

$$-\log((X_1X_2)^Z) = -Z\log(X_1X_2) = Z(-\log(X_1) - \log(X_2))$$

De $X_{i,i=1,2} \cap$ *Uniforme*$(0,1)$ e considerando o resultado 2.2.3, tem-se que $-\log(X_i) \cap$ *Exponencial*(1). Como as variáveis correspondentes a estas expressões são i.i.d., então podemos concluir que $-\log(X_1) - \log(X_2) \cap$ *Gama*$(2,1)$.

De $Z \cap$ *Uniforme*$(0,1)$, podemos concluir, considerando o Corolário 1, que

$$Z(-\log(X_1) - \log(X_2)) \cap \textit{Exponencial}(1).$$

Fazendo a exponencial negativa, obtemos

$$\exp\{-Z(-\log(X_1) - \log(X_2))\} = \exp\{Z(\log(X_1) + \log(X_2))\} = (X_1 X_2)^Z$$

e considerando a observação 2.2.2, concluímos que esta variável aleatória vai ter distribuição *Uniforme*(0,1).

Para melhor caracterizar a distribuição uniforme também podemos fazer referência ao conceito de *distribuições Uniformes generalizadas* (Proctor (1987)):

Definição 2.2.1: Definem-se *distribuições Uniformes generalizadas* as distribuições com função distribuição

$$F_X(x) = 1 - \{1 - k(x-a)^c\}^h, \;\; k, c, h > 0; a \leq x \leq a + k^{-1/c}$$

Paul (2003) demonstrou outros resultados que também se podem apresentar como uma característica importante não só para a uniformidade mas também para estatísticas ordinais envolvendo variáveis aleatórias com distribuição uniforme. É assim importante referenciá-los, pois irão aprofundar a investigação deste tema.

Uma caracterização da uniformidade feita através de transformações não lineares

Seja X uma v.a. absolutamente contínua definida no suporte [*a, b*], com função distribuição $F(x)$ e função densidade de probabilidade $f(x)$. Seja N um inteiro positivo arbitrário. Podemos enunciar o seguinte lema:

Lema 2.2.1: *Tem-se que* $\binom{N}{k}\int_a^b F(x)^k\left(1 - F(x)\right)^{N-k} f(x)dx = 1/(N+1)$, *para cada k=0,1,….,N.*

Dem: Seja $I_k = \binom{N}{k}\int_a^b F(x)^k\left(1 - F(x)\right)^{N-k} f(x)dx$. Façamos a demonstração por indução em *N*.

Fazendo a mudança de variável $dt = f(x)dx$, ficamos com

$I_k = \binom{N}{k}\int_0^1 t^k(1-t)^{N-k}dt$. Rapidamente podemos concluir que $I_0 = 1/(N+1)$. Integrando por partes, obtemos

$$\binom{N}{k}\int_0^1 t^k(1-t)^{N-k}dt = \frac{N-k}{k+1}\int_0^1 t^{k+1}(1-t)^{N-k-1}dt.$$

Donde concluímos que $I_k = I_{k+1}$, como queríamos demonstrar.

Obs 2.2.3: O facto de $\binom{N}{k}\int_a^b F(x)^k\big(1-F(x)\big)^{N-k}f(x)dx$ não depender nem de *k,* nem de a nem de *b* leva-nos a concluir que existe uma ligação entre ele e as características da uniformidade.

Obs 2.2.4: Associando o intervalo [*a, b*] à distribuição da variável aleatória que nele está definida, verificamos que este se trata de um espaço de probabilidades. Se considerarmos as *N* + 1 variáveis aleatórias $\binom{N}{k}F(X)^k\big(1-F(X)\big)^{N-k}$definidas neste espaço de probabilidades e variando em *k =1,2,…..,N,* podemos verificar que todas elas têm valor médio igual a $1/(N+1)$.

Teorema 2.2.2: *Seja N um inteiro positivo arbitrário. Seja X uma v.a. contínua. X tem distribuição Uniforme(0,1), sse para cada k=0,1,….,N, a variável aleatória* $\binom{N}{k}X^k(1-X)^{N-k}$ *tiver valor médio* $1/(N+1)$.

Dem: A condição necessária é provada por alguns aspetos referidos na observação 2.2.4 e pelo facto de $F(X)$ ser uniformemente distribuída em [0,1].

Agora suponhamos que, para cada *k = 1,2,….,N* , a v.a. $\binom{N}{k}X^k(1-X)^{N-k}$ tem valor médio $1/(N+1)$. Em particular, se *k = N,* tem-se que $E[X^N] = 1/(N+1)$ para cada *N.* Mas se considerarmos uma v. a. *Y* com distribuição *Uniforme(0,1),* temos também que $E[Y^N] = 1/(N+1)$, para todo o *N.*

Sendo *N* um número arbitrário, então temos que os momentos de ordem *N* vão coincidir para todo o *N.* Assim, como as v.a.'s estão definidas num suporte compacto, a distribuição *Uniforme(0,1)* é unicamente determinada por estes momentos.

2.3 Distribuição do produto e da soma de variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme

Caso 1: *n* = 2

Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição uniforme definida no intervalo $[a,b]$ e $[c,d]$, respetivamente. Standartizando, obtemos as variáveis aleatórias $U_1 = \frac{X_1-a}{b-a}$ e $U_2 = \frac{X_2-c}{d-c}$, com distribuição *Uniforme*(0,1). Façamos

$$\begin{cases} R = U_1 + U_2 \\ S = U_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_2 = R - S \\ U_1 = S \end{cases}$$

Obtemos assim o valor do jacobiano igual a 1, e logo vamos ter

$$f_{R,S}(r,s) = f_{U_1,U_2}(s, r-s)|J| = f_{U_1}(s) f_{U_2}(r-s) = 1, \;\; 0 < s < 1,$$
$$0 < r < 1 + s.$$

donde

$$f_R(r) = \begin{cases} \int_0^r 1 \, ds = r\,, & 0 < r < 1 \\ \int_{r-1}^1 1 \, ds = 2 - r, & 1 \le r < 2 \end{cases}$$

Assim, podemos concluir que $R = U_1 + U_2$ vai ter uma distribuição triangular.

Agora façamos

$$\begin{cases} V = U_1 \, U_2 \\ W = U_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_2 = \dfrac{V}{W} \\ U_1 = W \end{cases}$$

Obtemos assim o jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} \frac{1}{W} & -\frac{V}{W^2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{W}$$

Então vamos obter, como função distribuição conjunta de V e de W,

$$f_{V,W}(v,w) = f_{U_1,U_2}(w, v/w)|J| = f_{U_1}(w) f_{U_2}(v/w) \frac{1}{|w|} = \frac{1}{w} ;$$

se $0 < w < 1$, $0 < v < w \Rightarrow v < w < 1$ e logo vamos obter

$$f_V(v) = \int_v^1 \frac{1}{w} dw = -\log(v), \qquad 0 < v < 1$$

A função distribuição da soma de duas variáveis aleatórias independentes é designada como a **convolução** das respetivas f.d.'s de cada uma dessas variáveis aleatórias (Renyi,1970).

Caso 2: Um valor de *n* geral

Para a soma e o produto de variáveis aleatórias com distribuição uniforme estarem bem estudadas, não chega a elaboração de cálculos para valores de *n* específicos. Há assim que generalizar o valor da dimensão do vetor de variáveis aleatórias para melhor aprofundar o estudo deste tópico. Para o caso da soma, a sua distribuição pode ser determinada de forma recursiva. Habibi *et al* (2006) conseguiu achar a dita distribuição quando as variáveis aleatórias $X_i, i = 1, .. n$ são independentes mas não têm a mesma distribuição uniforme, isto é, cada variável do vetor é distribuída uniformemente, mas com parâmetros diferentes. Em primeiro lugar, vamos assumir, sem perda de generalidade, que $X_i \cap$ *Uniforme*$(0,a_i)$. (No caso geral, em que $X_i \cap$ *Uniforme*(b_i,c_i), seja $Y_i = X_i - b_i$. Então $a_i = c_i - b_i$ e tem-se que $\sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} Y_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$. Assim é suficiente achar a distribuição de $\sum_{i=1}^{n} Y_i$).

Se esta soma de variáveis aleatórias (que podemos designar como S_n) for não negativa, então temos que a sua função densidade de probabilidade vai ser nula para $s < 0$. Podemos assim determinar a Transformada de Laplace (unilateral) desta mesma f.d.p.$- f_n$, que se expressa do seguinte modo:

Proposição 2.3.1: *A transformada de Laplace de* f_n *é dada por*

$$\int_0^\infty e^{-ts} f_n(s)ds = \frac{1}{A_n}\left\{t^{-n} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k(t)^{-n}T_k(t)\right\}$$

Em que

$$T_k(t) = \sum_{J_k} \exp\left\{-t\left(\sum_{l=1}^{k} a_{j_l}\right)\right\}$$

Com $J_k = \{(j_1, \dots, j_k): 1 \le j_1 < j_2, \dots < j_k < n\}$ *e* $A_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$.

Deste modo, a f.d.p. f_n pode agora ser obtida aplicando a transformação inversa de Laplace. É importante também referir o seguinte:

Proposição 2.3.1: *A função* $g_n(s)$ *definida por*

$$g_n(s) = \frac{1}{A_n(n-1)!}\left\{s^{n-1} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{J_k}\left[\left(s - \sum_{l=1}^{k} a_{j_l}\right)^+\right]^{n-1}\right\}$$

para $s \ge 0$, *tem a mesma transformada de Laplace que* $f_n(s)$, *sendo* $(x)^+ = max(0, x)$.

Estas foram duas grandes proposições que foram provadas por Habibi *et al* (2006) com o objetivo de os ajudar a descobrir a dita f.d.p. f_n da dita soma de variáveis com distribuição uniforme com diferentes parâmetros. Posto isto, podemos definir o seguinte teorema:

Teorema 2.3.1: *Para* $n \ge 2$, *a função densidade de probabilidade de* S_n *é dada por*

$$f_n(s) = \frac{1}{A_n(n-1)!}\left\{s^{n-1} + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k \sum_{J_k}\left[\left(s - \sum_{l=1}^{k} a_{j_l}\right)^+\right]^{n-1}\right\}$$

para $0 \le s \le \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Dem: Tendo em conta a unicidade da transformação de Laplace, temos, pela proposição 2.3.1, que $f_n = g_n$ para todo o *n*. Além disso, f_n e g_n são funções contínuas, e portanto, $f_n(s) = g_n(s)$ para todo o *s*. Por fim, como temos $S_n \leq \sum_{k=1}^{n} a_k$, então vamos ter que $g_n(s) = 0$ para $s > \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Obs 2.3.1: No caso i.i.d., em que $X_i \cap$ *Uniforme*(0,1), f_n reduz-se a

$$f_n(s) = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} [(s-k)^+]^{n-1}$$

para $0 \leq s \leq n$.

Apesar de ser mais "engenhoso" achar a distribuição da soma de *n* variáveis com distribuição uniforme de forma recursiva, este método é bastante complicado e trabalhoso. Gnedenko (1968) trabalhou num método um pouco mais simples para achar a dita distribuição, que se resume ao seguinte: seja $(X_1, \dots, X_n)$ um vetor *n*-dimensional de variáveis aleatórias. Pretendemos achar a distribuição da soma

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

Seja $f_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1, \dots, x_n)$ a f.d.p. conjunta do vetor dado. Tem-se que a função distribuição da soma é dada por

$$\Phi(y) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq y\right) = \iiint\limits_{\sum_{i=1}^{n} x_i \leq y} \dots \int f_{(X_1,\dots,X_n)}(x_1, \dots, x_n)dx_1 \dots dx_n$$

Para uma observação mais detalhada, consideremos *n* = 2. Temos assim que

$$\Phi(y) = \mathbb{P}(X_1 + X_2 \leq y) = \iint\limits_{x_1+x_2 \leq y} f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2)dx_1dx_2$$

$$= \int \int_{-\infty}^{y-x_1} f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2)dx_2dx_1 \quad (1)$$

No caso particular em que as duas variáveis aleatórias são independentes, temos que $f_{(X_1,X_2)}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$ e logo podemos escrever a equação anterior da forma

$$\Phi(y) = \int dx_1 \int_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) dx_2 =$$

$$= \int dx_1 \int_{-\infty}^{y} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(z - x_1) dz =$$

$$= \int_{-\infty}^{y} dz \left\{ \int f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(z - x_1) dx_1 \right\} \ (2)$$

No caso geral, podemos escrever

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{y} dx_1 \int f_{X_1,X_2}(x_1, z - x_1) dz \ \ (3)$$

(Nota: O integral sem extremos designa um integral em $\mathbb{R}$)

Assim, vamos ter, para o caso de independência,

$$f_{S_2}(y) = \int f_{X_1}(z) f_{X_2}(z - y) dz \ \ (4)$$

Agora suponhamos que (X_1, X_2) é um vector de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição *Uniforme*(*a,b*). Pela equação (4) temos que

$$f_{S_2}(y) = \int_{a}^{b} f_{X_1}(z) f_{X_2}(z - y) dz = \frac{1}{b - a} \int_{a}^{b} f_{X_2}(z - y) dz$$

Pelo facto de

$$y - z < 2a - z < a$$

para $y < 2a$ e

$$y - z > 2b - z > b$$

para $y > 2b$,

concluímos que a f.d.p. é sempre nula se $y < 2a$ e para $y > 2b$. Se considerarmos os valores de y tais que $2a < y < 2b$, o f.d.p. vai ser diferente de zero para os valores que *z* que satisfazem a desigualdade

$$a < y - z < b \Leftrightarrow y - b < z < y - a$$

De $y > 2a$ vem que $y - a > a$. É óbvio que $y - a \leq b$ e daí podemos concluir que

$$2a < y \leq a + b$$

Temos então que, para este intervalo de valores, a função densidade de probabilidade é dada por

$$f_{S_2}(y) = \int_a^{y-a} \frac{1}{(b-a)^2} dz = \frac{y-2a}{(b-a)^2}$$

Analogamente, podemos concluir que

$$a + b < y \leq 2b$$

e a f.d.p. neste intervalo de valores é dada por

$$f_{S_2}(y) = \int_{y-b}^{b} \frac{1}{(b-a)^2} dz = \frac{2b-y}{(b-a)^2}$$

E assim conseguimos obter a função densidade de probabilidade da soma de variáveis aleatórias com distribuição *Uniforme*(a,b) de um vetor de dimensão 2 que é dada por

$$f_{S_2}(y) = \begin{cases} \dfrac{y-2a}{(b-a)^2}, & 2a < y \leq a+b \\ \dfrac{2b-y}{(b-a)^2}, & a+b < y \leq 2b \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Dettman *et al.* (2009) basearam-se em métodos de análise complexa para determinarem a distribuição do produto de n variáveis aleatórias com distribuição uniforme, cuja f.d.p. é apresentada no teorema seguinte:

Teorema 2.3.2: *Seja* $\{X_i\}_{i=1,2\ldots,n}$ *um vetor de variáveis aleatórias i.i.d. com distribuição Uniforme(a,b). A função densidade de probabilidade da v. a.* $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ *é dada pela função*

$$f_X(x) = \begin{cases} f_X^k(x), & a^{n-k+1}b^{k-1} \leq x \leq a^{n-k}b^k, k = 1,2\ldots,n \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

em que

$$f_X^k(x) = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{(b-a)^n(n-1)!}\binom{n}{j}\left(\ln\frac{b^{n-j}a^j}{x}\right)^{n-1}$$

Considerando o caso específico em que $X_i \cap$ *Uniforme*(0,1), peguemos na v. a. $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ e façamos o seu logaritmo simétrico:

$$-\log(X) = -\log\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = -\sum_{i=1}^{n}\log(X_i)$$

Como $X_i \cap$*Uniforme*(0,1), tem-se, pelo resultado 2.2.3, que $Z_i = -\log(X_i) \cap$ *Exponencial*(1), donde $Z = -\sum_{i=1}^{n}\log(X_i) \cap$ *Gama*(n,1).

Para chegarmos à distribuição do produto, basta determinarmos a distribuição de $W = e^{-Z}$. Temos

$F_W(w) = \mathbb{P}[W \leq w] = \mathbb{P}[e^{-z} \leq w] = \mathbb{P}[Z > -\log(w)] = 1 - F_Z(-\log(w))$

E assim vamos obter

$f_W(w) = \frac{d(1-F_Z(-\log(w)))}{dw} = f_Z(-\log(w))\frac{1}{w} = \frac{1}{w}\frac{e^{\log(w)}}{\Gamma(n)}(-\log(w))^{n-1} = \frac{(-\log(w))^{n-1}}{\Gamma(n)}$

se $-\log(w) > 0 \iff 0 < w < 1$.

2.4 Estatísticas ordinais

Sabe-se que, dado um vetor de v.a's $(X_1, \dots\dots, X_n)$ i.i.d., a f.d. da k-ésima estatística ordinal é dada por

$$F_{X_{k:n}}(x) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} F_X^i(x)(1 - F_X(x))^{n-i}$$

tendo-se assim, para o caso particular da distribuição Uniforme,

$$\begin{aligned} F_{X_{k:n}}(x) &= \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^i \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^{n-i} \\ &= \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{b-a}\right)^n (x-a)^i (b-x)^{n-i} \end{aligned}$$

Trata-se, como é sobejamente conhecido, da f.d. da *Beta*(*k,n-k+1*).

A partir desta expressão, podemos obter as funções de distribuição do máximo e do mínimo,

$$F_{X_{n:n}}(x) = \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^n \text{ e } F_{X_{1:n}}(x) = 1 - \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^n.$$

Distribuição dos espaçamentos (spacings) para o caso de variáveis iid com distribuição uniforme

Seja $(X_1, \dots., X_n)$ um vetor de variáveis aleatórias iid com distribuição *Uniforme*(*a,b*). Pretendemos achar a distribuição dos espaçamentos $S_k = X_{k:n} - X_{k-1:n}$.

Sabemos que, sendo $X \cap$ *Uniforme*(*a,b*), temos que a variável *U*= $\frac{X-a}{b-a}$ tem distribuição *Uniforme*(*0,1*). Estamos deste modo a reduzir a distribuição *Uniforme*(*a,b*) à distribuição uniforme standard, para melhor facilitar os cálculos que se vão efetuar. Vamos assim trabalhar com o vetor $(U_1, \dots., U_n)$ que tem distribuição *Uniforme*(*0,1*) e utilizaremos as estatísticas ordinais $U_{i:n}$ = $\frac{X_{i:n}-a}{b-a}$

Como primeiro auxílio para achar a distribuição dos spacings, temos a função densidade de probabilidade conjunta da i-ésima e da k-ésima estatística ordinal, que é dada por

$$f_{U_{i:n},U_{j:n}}(u,y) = \frac{n!}{(i-1)!\,(j-i-1)!\,(n-j)!} F_U^{i-1}(u)[F_U(y) - F_U(u)]^{j-i-1}[1 - F_U(y)]^{n-j} f_U(u) f_U(y)$$

Como os espaçamentos resultam da diferença entre $U_{k:n}$ e $U_{k-1:n}$, será bastante útil aplicar a f.d.p. conjunta anterior ao caso da k-ésima e da (k-1)-ésima estatística ordinal, de que resulta a f.d.p. conjunta

$$f_{U_{k-1:n},U_{k:n}}(u,y) = \frac{n!}{(k-2)!\,(n-k)!} F_U^{k-2}(u)[1 - F_U(y)]^{n-k} f_U(u) f_U(y)$$

para $0 < u < y < 1$.

Façamos agora

$$\begin{cases} S_k = U_{k:n} - U_{k-1:n} \\ T = U_{k-1:n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U_{k:n} = S_k + T \\ U_{k-1:n} = T \end{cases}$$

Obtemos assim o Jacobiano

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

e por conseguinte, a f.d.p. conjunta das novas variáveis é dada por

$$f_{S_k,T}(s,t) = f_{U_{k-1:n},U_{k:n}}(t, s+t)|J| =$$

$$\frac{n!}{(k-2)!\,(n-k)!} F_U^{k-2}(t)[1 - F_U(s+t)]^{n-k} f_U(t) f_U(s+t)|1| =$$

$$\frac{n!}{(k-2)!(n-k)!} t^{k-2}(1-s-t)^{n-k}, \text{ para } \; 0 < t < s+t < 1$$

Desta última desigualdade podemos concluir que $0 < t < 1 - s$ e $s > 0$, donde podemos obter a f.d.p. marginal de S_k,

$$f_{S_k}(s) = \int_0^{1-s} \frac{n!}{(k-2)!\,(n-k)!} t^{k-2}(1-s-t)^{n-k} dt$$

para $0 < s < 1$.

Fazendo a mudança de variável $v = \frac{t}{1-s}$, obtemos $t = (1-s)v$. Fazendo $t = 0$ e $t = 1-s$ obtemos $v = 0$ e $v = 1$, respetivamente. Então temos que

$$f_{S_k}(s) = \int_0^1 \frac{n!}{(k-2)!\,(n-k)!}(1-s)^{k-2} v^{k-2}(1-s-(1-s)v)^{n-k}(1-s) dv =$$

$$= \frac{n!}{(k-2)!\,(n-k)!} \int_0^1 (1-s)^{k-2} v^{k-2}(1-s)^{n-k+1}(1-v)^{n-k} dv =$$

$$= \frac{n!\,(1-s)^{n-1}}{(k-2)!\,(n-k)!} \int_0^1 v^{k-2}(1-v)^{n-k} dv$$

$$= \frac{n!\,(1-s)^{n-1}}{(k-2)!\,(n-k)!} = \frac{n!\,(1-s)^{n-1}}{(k-2)!\,(n-k)!} Beta(k-1, n-k+1)$$

$$= \frac{n!\,(1-s)^{n-1}}{(k-2)!\,(n-k)!} \frac{(k-2)!\,(n-k)!}{(n-1)!} = n(1-s)^{n-1},$$

se $0 < s < 1$.

Teorema 2.4.1: *X tem distribuição Uniforme(a,b) sse os espaçamentos determinados por uma amostra aleatória* $(X_1, \ldots\ldots, X_n)$ *forem equidistribuídos.*

Dem: Anteriormente determinou-se a distribuição dos espaçamentos entre estatísticas ordinais consecutivas provenientes de um vetor de variáveis aleatórias com distribuição *Uniforme*(*a,b*), cuja f.d.p. é dada por

$$f_{S_k}(s) = n(1-s)^{n-1}$$

para $0 < s < 1$.

Tendo-se $S_k = X_{k:n} - X_{k-1:n}$, esta expressão não vai depender do valor de k, pelo que os spacings vão ser equidistribuídos, ou seja, vão ter todos a mesma distribuição.

Distribuição do Range para o caso de variáveis i.i.d. com distribuição uniforme

Tendo novamente o vetor de v.a.'s i.i.d. $(X_1, \ldots\ldots, X_n)$ com distribuição *Uniforme*(a,b). Pretendemos agora achar a distribuição do Range $R = X_{n:n} - X_{1:n}$. Façamos

$$\begin{cases} R = X_{n:n} - X_{1:n} \\ T = X_{1:n} \end{cases}$$

Resolvendo em ordem às variáveis correspondentes às estatísticas ordinais, obtemos

$$\begin{cases} X_{n:n} = R + T \\ X_{1:n} = T \end{cases}$$

Aplicando a f.d.p. conjunta da i-ésima e da k-ésima estatística ordinal ao caso específico do mínimo e do máximo vamos ter

$$f_{X_{1:n},X_{n:n}}(x,y) = n(n-1)[F_X(y) - F_X(x)]^{n-2} f_X(x) f_X(y)$$

para $a < x < y < b$

Resultado 2.4.1 (Demonstrado por Shimizu e Huang e referido por Jonhson *et al* (1995)): No conjunto das distribuições absolutamente contínuas de variância finita, a distribuição *Uniforme*$(0,\theta)$, com $\theta > 0$, é caracterizada pela propriedade de $R = X_{2:2} - X_{1:2}$ e $X_{1:2}$ serem iguais em distribuição.

Dem: Temos, para amostras aleatórias de dimensão n com distribuição *Uniforme*(a,b),

$$f_R(r) = n(n-1)\left(\frac{1}{b-a}\right)^n r^{n-2}(b-r-a)$$

para $0 < r < b-a$;

Restringindo para $n = 2$ e para as distribuições do tipo *Uniforme*($0,\theta$) obtemos

$$f_R(r) = \frac{2}{\theta^2}(\theta - r)$$

para $0 < r < \theta$;

e tem-se que a f.d. do mínimo é dada por

$$F_{X_{1:n}}(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{\theta}\right)^2$$

Derivando em ordem a x obtemos

$$f_{X_{1:n}}(x) = \frac{2}{\theta^2}(\theta - x)$$

Como a expressão da f.d.p. é idêntica para as duas variáveis aleatórias, então podemos concluir que as variáveis aleatórias que representam o mínimo das estatísticas ordinais e o range para uma amostra de dimensão 2 são identicamente distribuídas.

Relação entre os spacings amostrais médios e a distribuição uniforme

O objetivo deste ponto é provar que, para todos os valores de N, as N+1 quantidades $E(X_{1:n} - a)$, $E(X_{2:n} - X_{1:n})$,. . ., $E(X_{n:n} - X_{n-1:n})$, $E(b - X_{n:n})$ são iguais se e só se as variáveis $X_1, \ldots, X_n$ têm distribuição *Uniforme*(a, b) (Paul, 2003)

Consideremos a seguinte expressão relativa aos spacings médios amostrais de uma distribuição absolutamente contínua com suporte [a,b]:

$$E[X_{k+1:N} - X_{k:N}] = \binom{N}{k} \int_a^b F(x)^k \big(1 - F(x)\big)^{N-k} dx$$

Para todo o $k=0,2,\ldots,N$ em que $X_0 = a$ e $X_{n+1} = b$

É fácil determinarmos os valores desta expressão para $k = 0$ e $k = 1$, pois eles vão mostrar o valor médio do espaçamento entre o mínimo de uma amostra de dimensão n e o valor de a, e o valor médio do espaçamento entre b e o máximo de uma amostra de dimensão n, respetivamente.

Teorema 2.4.2: *Seja N um inteiro positivo arbitrário. Então os valores de* $E[X_{k+1:n} - X_{k:n}]$, *k=1,2,…,N , em que* $X_0 = a$ *e* $X_{n+1} = b$ *são iguais sse a distribuição respectiva é Uniforme(a,b).*

Lema 2.4.1: *Seja S um espaço de probabilidades que consiste no intervalo [a,b] com a sua correspondente distribuição Uniforme. Seja* $G(x)$ *uma função absolutamente contínua crescente definida em S, tal que* $G(a) = 0$ *e* $G(b) = 1$. *Suponhamos que* $G(x)$ *tem distribuição Uniforme(0,1). Então* $G(x) = (x - a)/(b - a)$.

Dem:

Dem (Teorema 2.4.2): Se as variáveis aleatórias tiverem distribuição *Uniforme*(*a,b*), é óbvio, pelo lema 2.2.1, que os espaçamentos amostrais médios são iguais. Provemos agora a implicação contrária.

Seja N um inteiro positivo. Dado que os espaçamentos amostrais médios são todos iguais, temos que todos eles vão ter o valor de $\frac{b-a}{N+1}$, pois para $k = N$,

$$E[X_{N+1:N} - X_{N:N}] = \int_a^b F(x)^k dx = \frac{b-a}{N+1}$$

Agora consideremos o espaço de probabilidades indexado no intervalo [*a,b*] e caracterizado pela distribuição uniforme que nele está incluída. Definamos $\Phi = F(x)$. Pela equação anterior obtemos

$$E[\Phi^N] = \frac{1}{N+1}$$

para cada inteiro positivo *N.* Analogamente, Se U é uma v.a. contínua com distribuição *Uniforme*(0,1), tem-se

$$E[\mathrm{U}^N] = \frac{1}{N+1}$$

Pelo que os momentos de ordem *N* de Φ e de *U* vão ser iguais para todo o *N.* Assim $\Phi \cap$ *Uniforme*(0,1) e pelo lema 2.4.1, tem-se que

$$F(x) = \frac{(x-a)}{(b-a)}$$

Obs 2.4.1: Este teorema só é satisfeito no caso de *N* ser um inteiro positivo *arbitrário*.

Existem também outros teoremas que caracterizam as estatísticas ordinais envolvendo variáveis aleatórias com distribuição uniforme, referidos por Gupta *et al* (1993). A seguir apresentam-se dois desses teoremas que melhor caracterizam este tema.

Teorema 2.4.3: *Seja $X_1,\ldots,X_n$ uma amostra aleatória proveniente de uma distribuição F. Se F corresponder a uma distribuição uniforme definida num certo intervalo [a,b], então satisfaz a propriedade*

$$E(X_1 | X_{1:n}, X_{n:n}) = \frac{1}{2}(X_{1:n} + X_{n:n}) \quad (1)$$

para todo o $n \geq 3$.

Agora vamos ter em atenção o seguinte:

Seja F uma função distribuição tal que $F(\{x\}) = 0$ para $x \in \mathbb{R}$. Definamos o suporte de *F* como

$$S(F) = \{x \in \mathbb{R}: F\big((x-\varepsilon, x+\varepsilon)\big) > 0, \forall\, \varepsilon > 0\}$$

e seja $c = \inf\{x : x \in S(F)\}$ e $d = \sup\{x : x \in S(F)\}$. Se $S(F)$ for um conjunto fechado, é claro que $c, d \in S(F)$, e portanto estes extremos vão tomar valores finitos.

Tem-se também, para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $F(\alpha) < F(\beta)$,

$$\frac{1}{F(\beta) - F(\alpha)} \int_{\alpha}^{\beta} y dF(y) = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \quad (2)$$

Face a estes aspetos podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 2.4.4: *Se F satisfizer a equação (2), então c e d são constantes finitas e F corresponde à função distribuição de uma distribuição Uniforme(c,d)*

2.5. Misturas de distribuições uniformes

Para finalizar o estudo desta tão detalhada distribuição, há que referir exemplos de misturas de distribuições que a envolvam. Johnson *et al* (1995) referiu alguns desses exemplos, mas apenas dois deles se destacam pela sua maior importância. O primeiro foi envolvido num estudo de problemas de estimação feito por Gupta e Miyawaki (1978) e refere uma mistura de duas distribuições uniformes com a f.d.p. dada por

$$f_Y(y) = pf_1(y, \beta) + (1 - p)f_2(y, \beta)$$

em que

$$f_1(y, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}, & 0 < y < \beta \\ 0, & c.c \end{cases}$$

e

$$f_2(y,\beta) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\beta}, & \beta < y < 1 \\ 0, & c.c \end{cases}$$

Só não conseguimos identificar a mistura quando $p = \beta$.

Tem-se que o *k*-ésimo momento da distribuição desta mistura é dado por

$$\mu_k' = p\frac{\beta^k}{k+1} + (1-p)\frac{1-\beta^k}{1-\beta}\frac{1}{k+1}$$

O segundo, já referido por Roy *et al* (1993), apresenta a mistura **binomial** de distribuições *Uniforme*(0,*a*), cuja f.d.p. é dada por

$$p_X(\, x |\, n, p, a\,) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} p^r\, (1-p)^{n-r}\, \frac{(r+1)x^r}{a^{r+1}} \quad ,0 < x < a$$

Em que o *k*-ésimo momento de ordem 0 é dado por

$$E(\, X^k\,) = a^k \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} p^r\, (1-p)^{n-r}\, \frac{(r+1)}{(r+k+1)}$$

Capítulo 3

Qual a relação entre uniformidade e entropia?

Antes de descobrirmos qual a relação entre uniformidade e entropia, devemos, em primeiro lugar, definir e caracterizar o conceito de entropia, que, em termos matemáticos ou probabilísticos deve ser desconhecido para alguns. Cavalcante (2004) não só definiu e caracterizou este conceito com muita clareza como também teve intenções de transmitir o conhecimento das distribuições de entropia máxima.

3.1 Definição de entropia

Seja X uma variável aleatória multidimensional, contínua, real e centrada (com média nula) com f.d.p. $f_X(x)$. Define-se como entropia a quantidade

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(x) &= -E\{\ln\left[f_X(x)\right]\} \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\ln[f_X(x)]\,dx \quad (3.1.1) \end{aligned}$$

Em termos não-analíticos, podemos definir a entropia como a "falta de informação" de uma determinada distribuição de probabilidade.

3.2 Distribuições de entropia máxima

Para um estudo mais aprofundado do que é a entropia, é de grande interesse tentar descobrir as distribuições que maximizam esta quantidade. Para tal, é necessário resolver o seguinte problema:

Maximizar $\mathcal{H}(x)$ sobre todas as distribuições $f_X(x)$ que satisfazem as condições

1. $f_X(x) \geq 0$, *com a igualdade válida apenas fora do suporte S da variável*
2. $\int_S f_X(x)dx = 1$;
3. $\int_S f_X(x)dx\, f_i(x)dx = \kappa_i$, *para* $1 \leq i \leq k$;

em que κ_i é o momento centrado de i-ésima ordem e $f_i(x)$ é uma função que faz $f_X(x)$ respeitar a restrição.

O problema acima pode ser resolvido através dos multiplicadores de Lagrange. Podemos então escrever o Lagrangiano:

$$J(f_X(x)) = -\int_S f_X(x) \ln[f_X(x)]\, dx + \beta_0 \left(\int_S f_X(x)dx \right) + \sum_{i=1}^{k} \beta_i \left(\int_S f_X(x)dx\, f_i(x)dx = \kappa_i \right) \quad (3.2.1)$$

em que $\beta_0, \dots, \beta_i$ são os multiplicadores de Lagrange.

Derivando a equação 3.2.1 em ordem à distribuição $f_X(x)$ obtemos

$$\frac{\partial J\left(f_X(x)\right)}{\partial f_X(x)} = -ln[f_X(x)] - 1 + \beta_0 + \sum_{i=1}^{k} \beta_i f_X(x) \quad (3.2.2)$$

em que $\beta_0, \dots, \beta_i$ são escolhidos de forma a que $f_X(x)$ satisfaça as restrições.

Posto isto, quais são as distribuições que maximizam a equação 3.2.2? A resposta depende das restrições impostas. Consideremos dois casos:

Caso 1: Suporte fixo (S = [*a*,*b*])

Neste caso não temos nenhuma restrição relativa aos momentos, pelo que os multiplicadores de ordem 1 a k vão todos tomar valor 0. Assim, igualando a equação 3.2.2 a zero, obtemos

$$-ln[f_X(x)] - 1 + \beta_0 = 0 \iff ln[f_X(x)] = \beta_0 - 1 \iff f_X(x) = e^{\beta_0 - 1}$$

e considerando a condição 2, temos

$$\int_S f_X(x)dx = 1 \iff \int_a^b e^{\beta_0 - 1}\, dx = 1 \iff e^{\beta_0 - 1}(b-a) = 1 \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{(b-a)}$$

Assim, podemos concluir que, sob a restrição de um suporte fixo, a distribuição com máxima entropia é a **distribuição uniforme.**

Caso 2: Valor médio e variância fixos

Neste caso existe restrição em relação aos momentos, donde $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \neq 0$. Analogamente ao caso de suporte fixo, se igualarmos a equação 3.2.2 a zero, obtemos

$$f_X(x) = \exp[\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 - 1] \quad (3.2.3)$$

Pretendemos assim determinar os valores destes escalares através da resolução do sistema

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 - 1]\, dx = 1 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x \exp[\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 - 1]\, dx = \kappa_1 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp[\beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 - 1]\, dx = \sigma^2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema dado começando na 2ª equação, obtêm-se os valores para os multiplicadores de Lagrange

$$\beta_{\mathbf{0}} = -\ln\left[\sqrt{2\pi\sigma}\right] \; ; \; \beta_{\mathbf{1}} = \kappa_1; \;\; \beta_{\mathbf{2}} = -\frac{1}{2\sigma^2}$$

E substituindo estes valores na equação 3.2.3, obtemos

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left[-\frac{(x-\kappa_1)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Logo, podemos concluir que, sob a restrição de valor médio e variância fixos, a distribuição de entropia máxima é a **distribuição normal**.

Para o desenvolvimento deste tema, é claro e óbvio que apenas nos iremos centrar no primeiro caso de distribuições de entropia máxima, pois este poderá ser uma "pista" fundamental para a descoberta da relação entre uniformidade e entropia.

3.3 Resultados interessantes relacionados com a entropia

Seja *X* uma variável aleatória contínua com distribuição *F*. Se a expressão analítica da sua f.d.p. representar uma função monótona, a sua entropia pode ser estimada pela lei dos grandes números."Traduzindo" esta frase para a linguagem matemática, temos, definindo a v. a. *Y*= $-\ln\left(f_X(x)\right)$,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(-\ln\left(f_X(x)\right) \leq y) = \mathbb{P}(f_X(x) \leq e^{-y}) =$$

$$\begin{cases} 1 - F_X(f_X^{-1}(e^{-y})), & se\ a\ f.d.p. for\ crescente \\ F_X(f_X^{-1}(e^{-y})), & se\ a\ f.d.p. for\ decrescente \end{cases}$$

Seja U uma v.a. uniformemente distribuída no intervalo [0,1]. Se fizermos

$F_X(f_X^{-1}(e^{-y})) = u$, obtemos

$$Y = -\ln\left[f_X\left(F_X^{-1}(u)\right)\right]$$

E pela lei dos grandes números podemos concluir que o valor médio de *Y* pode ser estimado pela média das observações de uma amostra proveniente de uma população que segue a distribuição de *Y.*

Sequeira (2009) elaborou estudos que envolveram uma família de variáveis aleatórias que são designadas por X_m, cujas densidades são representadas graficamente como retas de declive m , com $m \in$]-2,2[\ {0}. Este novo conjunto de variáveis aleatórias não deve ser dos "mais vistos" na área das probabilidades, pelo que seria interessante e inovador calcular a entropia das suas distribuições não só para os diferentes valores que o declive pode tomar, como também para os seus valores mais "problemáticos". Consideremos então 3 casos:

Caso 1: *m* ∉]-2,2[\ {0}

Temos

$$\mathcal{H}(x) = -E\left[-\ln\left(mX + 1 - \frac{m}{2}\right)\right] = -\int_0^1 \ln\left(mx + 1 - \frac{m}{2}\right)\left(mx + 1 - \frac{m}{2}\right)dx$$

$$= -\ln\left(\frac{m}{2} + 1\right) + m\left[\int_0^1 \left[\left(\frac{x}{2} + 1 - \frac{(2-m)}{4m}\right) - \left(\frac{(2-m)^2}{8m\left(mx + 1 - \frac{m}{2}\right)}\right)\right] dx\right]$$

$$= -\ln\left(\frac{m}{2} + 1\right) + \frac{1}{2} - \frac{(2-m)^2}{8m}\ln\left|\frac{m+2}{2-m}\right|$$

Caso 2: *m* = 0

Usando a expressão final obtida no caso anterior, temos

$$\lim_{m \to 0} -\ln\left(\frac{m}{2} + 1\right) + \frac{1}{2} - \frac{(2-m)^2}{8m}\ln\left|\frac{m+2}{2-m}\right| = 0$$

Caso 3: *m* = 2

Usando novamente a expressão final obtida no caso 1, temos

$$\lim_{m \to 0} -\ln\left(\frac{m}{2} + 1\right) + \frac{1}{2} - \frac{(2-m)^2}{8m}\ln\left|\frac{m+2}{2-m}\right| = \frac{1}{2} - \ln(2)$$

Se $m = -2$, o limite da função anterior quando m tende para esse valor é, sendo essa função contínua, o mesmo obtido anteriormente.

3.4 Um estudo de simulação

Iremos agora elaborar um estudo de simulação que tem como objetivo a resposta à pergunta que é expressa no título deste capítulo 3: "Qual a relação entre uniformidade e entropia?". Dito de outra forma, pretendemos averiguar se existe realmente a relação entre estes dois conceitos, e se ela existir, de que tipo de relação se trata. Como ferramentas iniciais para este estudo, vamos ter duas variáveis aleatórias, X e Y, sendo $X \cap Beta(p_1,q_1)$ e $Y \cap Beta(p_2,q_2)$, em que cada um dos dois pares de parâmetros está incluído no conjunto vetorial $\big((0.8,0.9),(0.95,1.05),(1.05,0.9),(0.95,0.9)\big)$, e vamos ter como objeto principal de estudo as variáveis aleatórias $W = \min\left(\frac{X}{Y}, \frac{(1-X)}{(1-Y)}\right)$ e $V = X + Y - \mathcal{I}[X+Y]$, cujas distribuições são desconhecidas, problema esse que foi parcialmente ultrapassado pela estimação das suas densidades. É correto dizer "parcialmente" porque a estimação não é muito segura devido ao facto de desconhecermos a apresentação de assíntotas verticais na sua representação gráfica ou analítica, o que conduziria a valores de entropia negativa, devido à expressão geral da função integranda usada para a calcular. Assim, para estarmos mais "seguros" do cálculo destes valores de entropias, "ignorámos" a estimação da densidade destas novas variáveis nas caudas, considerando apenas a estimação no intervalo [0.05,0.95], pois a primeira não se apresenta da melhor forma. Markovich (2007) estudou métodos bastante interessantes para estimar densidades com caudas pesadas, tais como o método paramétrico-não-paramétrico combinado, o método do estimador Barron e da otimização-χ^2, o método dos estimadores de núcleo com largura de banda variável e o método dos estimadores não-paramétricos transformados. O nível de complexidade e conhecimento destes métodos é no entanto, muito superior ao que é preciso para elaborar esta dissertação, daí não haver necessidade de serem descritos.

Para descobrir esta relação iremos, em primeiro lugar, verificar se as operações definidas por W e por V "aumentam" a entropia, relativamente aos valores das entropias das suas variáveis de entrada, isto é, se as entropias das suas distribuições (com densidades estimadas) estão mais próximas do valor da entropia da distribuição uniforme do que os valores das entropias das suas variáveis de entrada. De seguida iremos descobrir numericamente qual a relação entre uniformidade e entropia através do cálculo dos coeficientes de correlação de Pearson entre os valores das entropias obtidas para cada combinação de pares de parâmetros e os p-values do teste à uniformidade, feito às novas variáveis aleatórias.

Comecemos então por definir os valores das entropias das distribuições assumidas às variáveis de entrada (arredondados às milésimas):

Beta(0.8,0.9)	*Beta(0.95,1.05)*	*Beta(1.05,0.9)*	*Beta(0.95,0.9)*
-0.017	-0.004	-0.010	-0.004

Vamos começar por analisar a variável aleatória W, utilizando amostras de dimensão 1000. Temos de ter em atenção a assimetria da operação que lhe é atribuída, pois o estudo que é feito no caso em que X e Y têm distribuição Beta com diferentes pares de parâmetros pode não ser o mesmo no caso em que esses pares são "trocados". Combinando todos os pares a considerar no estudo, foi obtida a seguinte matriz de entropias:

X	Y			
	Beta(0.8,0.9)	*Beta(0.95,1.05)*	*Beta(1.05,0.9)*	*Beta(0.95,0.9)*
Beta(0.8,0.9)	0.011	0.010	0.010	0.012
Beta(0.95,1.05)	0.001	0.001	0.000	0.002
Beta(1.05,0.9)	0.001	0.003	0.003	0.003
Beta(0.95,0.9)	0.004	0.006	0.005	0.006

Como já era de esperar, os valores das entropias são todos positivos devido à insegurança da estimação da densidade da variável aleatória *W*. Os valores de entropia muito próximos de zero permitem concluir que há uma grande aproximação à uniforme por parte desta operação. Comparando cada uma das entradas da matriz com os valores das entropias obtidos para a distribuição das variáveis de entrada, verifica-se que, de uma maneira geral, esta operação "aumenta" a entropia, havendo pequenas exceções, tais como nos casos em que $X\cap$ *Beta*(*0.8,0.9*) e $Y\cap$ *Beta*(*0.95,1.05*) ou $Y\cap$*Beta*(*0.95,0.9*), em que as entropias das distribuições destas últimas variáveis aleatórias se aproximam muito mais do valor nulo. O mesmo acontece nos casos em que $X\cap$ *Beta*(*0.95,0.9*) e $Y\cap$ *Beta*(*0.95,1.05*) ou $Y\cap$*Beta*(*0.95,0.9*).

Passando agora ao teste à uniformidade, foram obtidos os seguintes resultados, refletidos na seguinte matriz de p-values:

X	*Y*			
	Beta(0.8,0.9)	*Beta(0.95,1.05)*	*Beta(1.05,0.9)*	*Beta(0.95,0.9)*
Beta(0.8,0.9)	0	0	0	0
Beta(0.95,1.05)	0.2963723	0.3611156	8.998106e-06	2.132657e-01
Beta(1.05,0.9)	0	0	3.152532e-06	1.079603e-08
Beta(0.95,0.9)	0	0	0	0

Observando os resultados obtidos, verificamos que na maior parte dos casos, existe rejeição à uniformidade, e esta realidade permite concluir a sensibilidade do teste para amostras de dimensão 1000. Juntando todas as colunas da matriz de entropias e todas as colunas da matriz de p-values em dois vetores separados, podemos obter facilmente a correlação de Spearman entre os ditos vetores, que tem o valor de -0.7286228. A negatividade deste valor permite concluir que um "aumento" da entropia conduz a uma "diminuição" do p-value, pelo que sugere a existência de uma relação inversa entre os dois conjuntos de valores.

Passemos agora ao estudo da v.a. *V*, utilizando amostras com a mesma dimensão. Aqui não existe a preocupação da assimetria, pois a operação dada é comutativa. Combinando todos os pares, obteve-se a seguinte matriz de entropias:

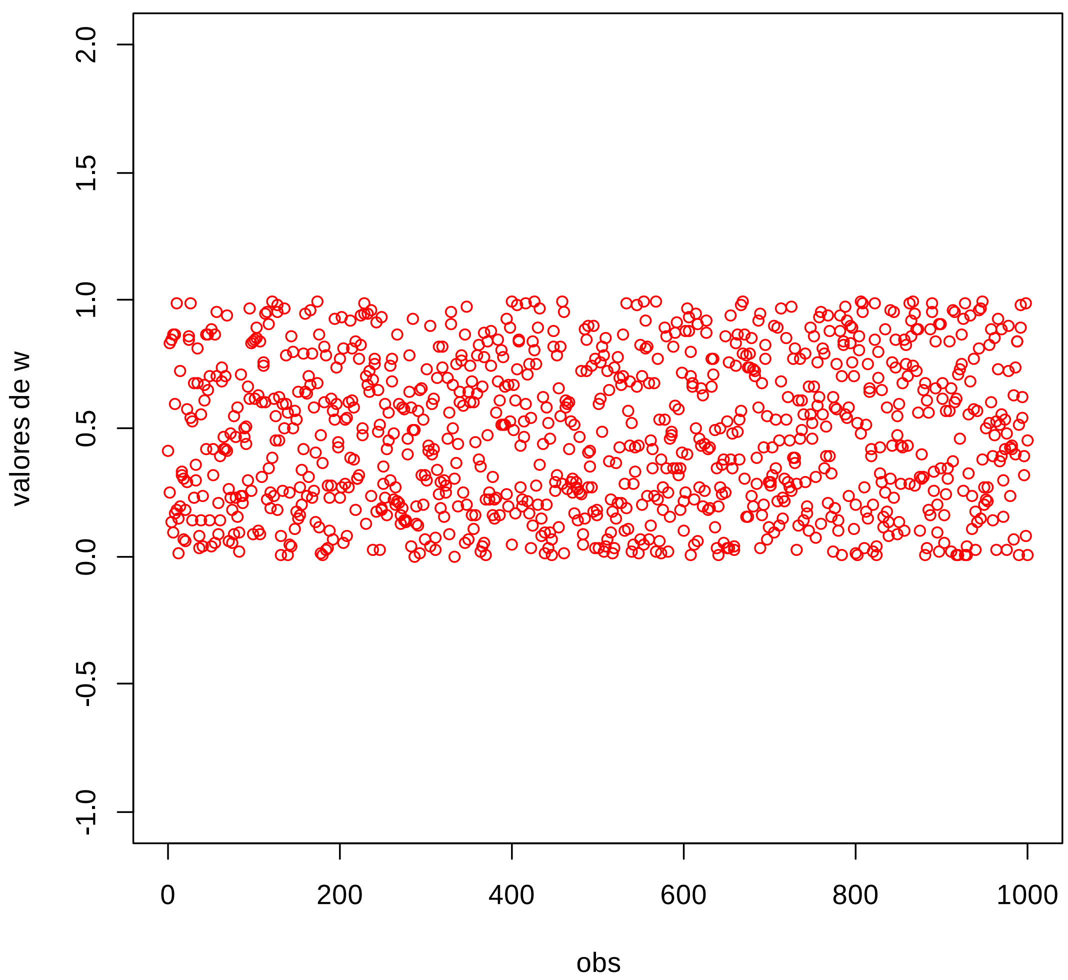
X	*Y*			
	Beta(0.8,0.9)	*Beta(0.95,1.05)*	*Beta(1.05,0.9)*	*Beta(0.95,0.9)*
Beta(0.8,0.9)	0.000	0.000	0.001	0.000
Beta(0.95,1.05)	-0.001	0.001	0.001	0.001
Beta(1.05,0.9)	0.002	0.001	-0.001	0.000
Beta(0.95,0.9)	0.001	-0.001	0.001	-0.001

Os valores apresentados revelam igualmente uma grande proximidade do valor nulo e a sua comparação com os valores das entropias obtidos para as variáveis de entrada revela o grande "aumento" da entropia por parte desta operação. Relativamente ao teste à uniformidade, foram obtidos os seguintes resultados:

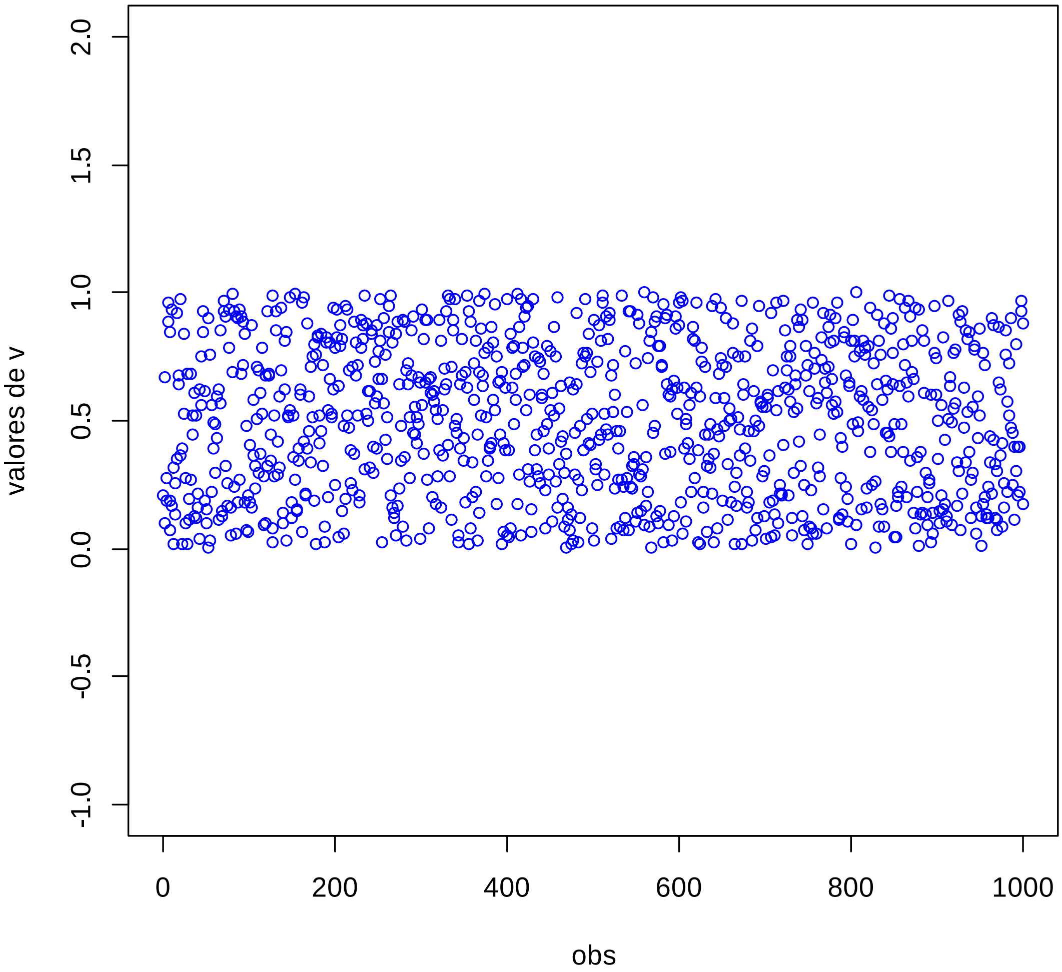
X	*Y*			
	Beta(0.8,0.9)	*Beta(0.95,1.05)*	*Beta(1.05,0.9)*	*Beta(0.95,0.9)*
Beta(0.8,0.9)	0.0009083712	0.02342241	0.010670534	0.06892753
Beta(0.95,1.05)	0.0317051582	0.71222324	0.008673585	0.92503785
Beta(1.05,0.9)	0.0136388982	0.24423427	0.729455867	0.89621714
Beta(0.95,0.9)	0.3245928648	0.83843258	0.754960454	0.23463999

Se considerarmos como nível de significância de referência $\alpha = 0.05$, temos 37.6% de rejeições, o que não é uma percentagem muito elevada. Conclui-se então que, para esta variável aleatória, já não se mostra a rejeição à uniformidade com tanta intensidade e que este teste já não é tão sensível como o anterior. Juntando novamente as colunas das duas matrizes em dois vetores, obtemos uma correlação de valor 0.1061923, que já é positiva, daí não revelar uma grande discrepância entre os valores das entropias e dos p-values obtidos no teste. No entanto este valor revela uma correlação baixa entre os dois vetores, devido ao facto de não estar muito próximo do valor 1, e isso leva-nos novamente a concluir o “não-relacionamento” entre os valores das entropias e os p-values obtidos.

Apesar da sensibilidade dos testes de Kolmogorov-Smirnov mostrar que nem sempre é aceite a hipótese das novas variáveis terem distribuição uniforme, a representação gráfica de 1000 observações dessas variáveis sugere um certo caos revelador de aproximação a essa mesma distribuição. Por exemplo, se simularmos 1000 valores da v.a. *W*, em que cada uma das variáveis de entrada tem distribuição *Beta(0.8,0.9)*, temos a seguinte representação gráfica das suas observações:

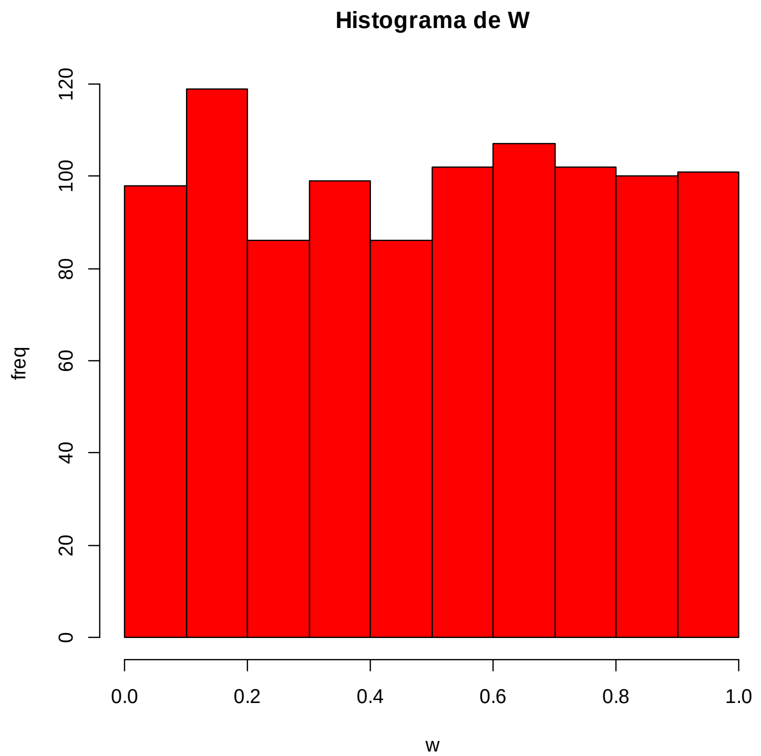


Como podemos observar, os pontos concentram-se em torno do intervalo [0,1] e distribuem-se quase uniformemente, daí a concluirmos a aproximação à distribuição uniforme por parte desta operação. Considerando agora a v.a. V obtivemos o gráfico seguinte:

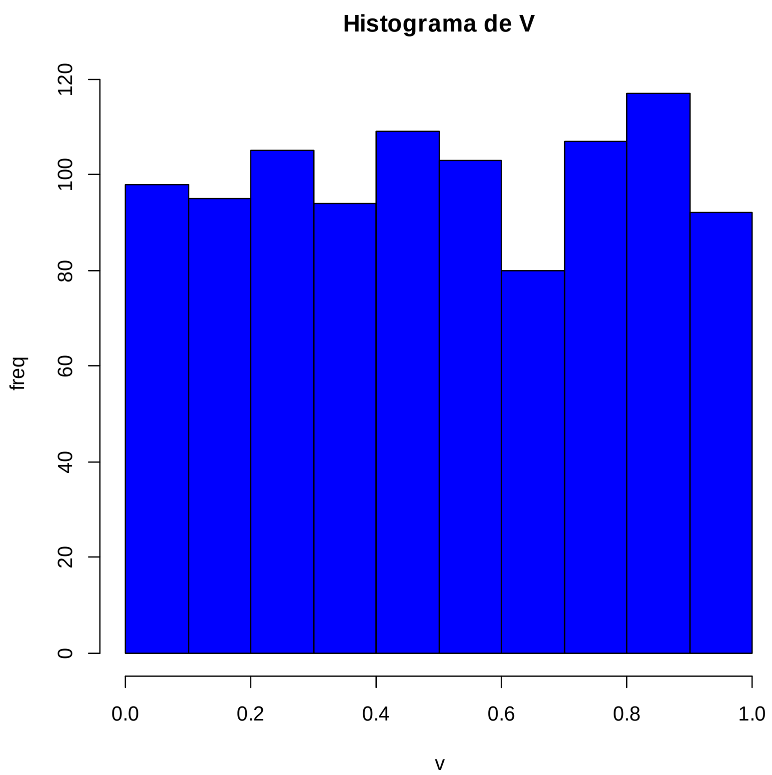


e igualmente podemos concluir que existe aproximação à distribuição uniforme.

Considerando agora o caso em que $X \cap Beta(0.95,1.05)$ e $Y \cap Beta(1.05,0.9)$, temos a seguinte representação gráfica para W:



e obtemos a seguinte representação gráfica para V:



Olhando atentamente para estes dois histogramas, concluímos igualmente que existe aproximação à distribuição uniforme, apesar de algumas barras não se apresentarem ao mesmo nível.

É também importante referir que as representações gráficas mostradas estão relacionadas com o facto das entropias das novas variáveis se aproximarem bastante do valor nulo, que é por sua vez o valor da entropia da distribuição uniforme.

Conclusões finais

Depois de termos elaborado este estudo de simulação, podemos concluir que apesar da v.a. V "aumentar" a entropia, o mesmo não se passa em relação à v.a. W, e que, para cada uma das operações, não existe relação entre os valores das entropias das suas diferentes "distribuições" e os p-values obtidos do teste à uniformidade. No entanto, apesar destas conclusões serem bastante claras, não expressam certeza devido à estimação incerta da densidade destas duas v.a.'s nas caudas. Esta realidade permite concluir que a relação entre uniformidade e entropia é um assunto que dispõe de muitos pontos de interrogação que ainda estão à espera de resposta.

Capítulo 4

Referências Bibliográficas

Cavalcante, C. C. (2004). *Sobre Separação Cega de Fontes: Proposições e Análises de Estratégias para Processamento Multi-Usuário*. Apêndice A: Definições Matemáticas, 232-236.

Cowan, R. (1980). A letter in *Constantine* (1980).

Das Gupta, S., Goswami, A. and Rao, B. V. (1993). On a characterization of uniform distributions. *Journal of multivariate analisis* **44**, 102-114.

David, H.A. (1981). *Order Statistics*, Wiley, New York.

Dettman, P. C., Georgiou O. (2009). Product of *n* independent Uniform Random Variables. *Statistics & probability letters,* **79**, 2501-2503.

Gnedenko, B. V. (1968). *Theory of probability*, fourth ed., Chelsea, New York,176-181.

Galambos, J., Kotz S. (1978). *Characterizations of Probability Distributions*, Lecture Notes in Mathematics, 675, New York: Springer-Verlag.

Goria, M.N. (1987). Some characterizations of the uniform distribution. *Comm. Statist*, **16**, 813–819.

Gupta, A.K., Miyawaki T. (1978). On a uniform mixture model, *Biometrical*

*Journal,***20**, 631-637.

Habibi, R., Nematollahi, A. R. and Sadooghi-Alvandi, S. M. (2006). On the distribution of the sum of independent uniform random variables. *Stat Papers* **50,** 171-175.

Hamdan, M. A. (1972). On a characterization of conditional expectations. *Technometrics*, **14**, 497-499.

Huang, J.S., Arnold, B.C., Ghosh, M. (1979*), On characterizations of the uniform distribution based on identically distributed spacings*, Sankhyã Ser. B 41 164–173.

Johnson, N. L., Kotz, S., and Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions*, vol. 2, end ed., Wiley, New York, 276-320.

Markovich, N. (2007). *Nonparametric analisys of univariate Heavy-tailed data,* Wiley Series in Probability and Statistics.

Paul, A. (2003). Characterizations of the uniform distribution via sample spacings and nonlinear transformations. *Journal Mathematical Analysis and Applications* **284**, 397- 402.

Pestana, D., Velosa, S. (2008). *Introdução à probabilidade e à estatística*, 3ª ed., volume I, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 432, 436.

Proctor, J. W. (1987). Estimation of two generalized curves covering the Pearson system, *Proceedings of ASA Computing Section*, 287-282.

Pusz, J. (1988). On a characterization of probability distributions by conditional expectations, *Demonstratio Matemática*, **21**, 247-253.

Rényi, A. (1970). *Probability Theory*, Vol 10, Joint edition, Budapest, 195.

Roy, M. K., Roy, A. K., Ali, M. Masoom (1993). Binomial mixtures of some standard distributions, *Journal of Information & Optimization Sciences*, **14**, 57-71.

Sequeira, F., (2009). *Meta-análise: Harmonização de testes usando os valores de prova.* Cap. 3, 46-62.

Shimizu, R. and Huang, J.S. (1983). On a characteristic property of the uniform distribution, *Annals of the institute of Statistical Mathematics*, **35**, 91-94.